Civil Services (Main)
Examination- 2025

SLPM-P-MTH

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : **तीन** घंटे
*Time Allowed : **Three** Hours*

अधिकतम अंक : **250**
*Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless otherwise mentioned, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) क्या समुच्चय {(0, 0, 0, 3), (1, 1, 0, 0), (0, 1, –1, 0)} को सदिश समष्टि $\mathbb{R}^4$ का एक आधार बनाने के लिए विस्तारित किया जा सकता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

Can the set {(0, 0, 0, 3), (1, 1, 0, 0), (0, 1, –1, 0)} be extended to form a basis of the vector space $\mathbb{R}^4$? Justify your answer. *10*

(b) रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, जो $T(x, y, z, w) = (x - w, y + z, z - w)$ द्वारा दिया गया है, का परिसर (रेन्ज), कोटि (रैंक), अष्टि (कर्नेल) और शून्यता ज्ञात कीजिए।

Find the range, rank, kernel and nullity of the linear transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ given by $T(x, y, z, w) = (x - w, y + z, z - w)$. *10*

(c) लम्बाई 6 मीटर और चौड़ाई 2 मीटर की एक आयताकार धातु की चादर दी गई है। चारों कोनों से चार बराबर वर्गों को हटाया गया है। इस चादर के फलकों को मोड़कर एक खुला आयताकार सन्दूक बनाना है। सन्दूक की ऐसी सन्निकट ऊँचाई ज्ञात कीजिए कि सन्दूक का आयतन अधिकतम हो।

A rectangular sheet of metal of length 6 meters and width 2 meters is given. Four equal squares are removed from the four corners. The sides of this sheet are now folded up to form an open rectangular box. Find approximately the height of the box, such that the volume of the box is maximum. *10*

(d) दिया गया है कि $f(x + y) = f(x)\, f(y)$, सभी वास्तविक x, y के लिए, $f(x) \neq 0$ किसी भी वास्तविक x के लिए और $f'(0) = 2$ है। सभी वास्तविक x के लिए दर्शाइए कि $f'(x) = 2f(x)$ है। अत: f(x) ज्ञात कीजिए।

Given that $f(x + y) = f(x)\, f(y)$ for all real x, y, $f(x) \neq 0$ for any real x and $f'(0) = 2$. Show that for all real x, $f'(x) = 2f(x)$. Hence find f(x). *10*

(e) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिंदु (1, 1, 0) है तथा जिसका निर्देशक वक्र $y = 0,\ x^2 + z^2 = 4$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is the point (1, 1, 0) and whose guiding curve is $y = 0,\ x^2 + z^2 = 4$. *10*

Q2. (a) माना $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ एक ऐसा रैखिक रूपांतरण है कि $T(1, 1, -1) = (1, 0)$, $T(4, 1, 1) = (0, 1)$ तथा $T(1, -1, 2) = (1, 1)$ है। T ज्ञात कीजिए।

Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation such that $T(1, 1, -1) = (1, 0)$, $T(4, 1, 1) = (0, 1)$ and $T(1, -1, 2) = (1, 1)$. Find T. *15*

(b) माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}.$$

Using Mean Value Theorem, prove that

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}.$$ *15*

(c) (i) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक, रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समांतर हैं और जो वक्र $x^2 + y^2 = 16,\ z = 0$ से होकर गुज़रता है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and that passes through the curve $x^2 + y^2 = 16,\ z = 0$. *10*

(ii) सरल रेखाओं

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ और } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the straight lines

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ and } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}.$$ *10*

Q3. (a) निम्नलिखित आव्यूह को सोपानक (एशेलॉन) रूप में समानीत कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix to echelon form : *15*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) उन गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$, $2x + y + z = 4$ से होकर गुज़रते हैं और समतल $3x + 4y = 14$ को स्पर्श करते हैं।

Find the equations of the spheres which pass through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$, $2x + y + z = 4$ and touch the plane $3x + 4y = 14$. *15*

(c) (i) $\iint\limits_R y \, dx \, dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ R, $y = x$ तथा $y = 4x - x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र है।

Evaluate $\iint\limits_R y \, dx \, dy$, where R is the region bounded by $y = x$ and $y = 4x - x^2$. *10*

(ii) यदि $u(x, y) = x \, f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ है, जहाँ f और g स्वेच्छ फलन हैं, तो दर्शाइए कि

I. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x \, f\left(\frac{y}{x}\right)$ है,

II. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ है।

If $u(x, y) = x \, f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, where f and g are arbitrary functions, then show that

I. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x \, f\left(\frac{y}{x}\right)$,

II. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ *10*

Q4. (a) दर्शाइए कि गोले

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0$$

का कोई ऐसा स्पर्श समतल नहीं है, जो कि सरल रेखा $\frac{x+6}{2} = y + 3 = z + 1$ से होकर गुज़र सके।

Show that there is no tangent plane to the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0$$

that can be passed through the straight line

$$\frac{x+6}{2} = y + 3 = z + 1.$$ *15*

(b) यदि $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{जब} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{जब} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

है, तो $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए।

If $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{when } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{when } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

then find

$f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$. *15*

(c) (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

के अभिलक्षणिक मान और संगत अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix *12*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(ii) माना P_n, $\mathbb{R}$ पर घात $\leq n$ के सभी बहुपदों के सदिश समष्टि को दर्शाता है। सत्यापित कीजिए कि

$$\dim\left(\frac{P_4}{P_2}\right) = \dim P_4 - \dim P_2$$

Let P_n denote the vector space of all polynomials of degree $\leq n$ over $\mathbb{R}$. Verify that

$$\dim\left(\frac{P_4}{P_2}\right) = \dim P_4 - \dim P_2.$$ *8*

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) $\left(1 - y^2 + \frac{y^4}{x^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = 0$ को हल कीजिए।

Solve $\left(1 - y^2 + \frac{y^4}{x^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = 0.$ *10*

(b) सभी दीर्घवृत्तों, जिनके अक्ष निर्देशांक अक्षों के संपाती हैं, का अवकल समीकरण बनाइए।

Form the differential equation of all ellipses whose axes coincide with coordinate axes. *10*

(c) सिद्ध कीजिए कि पृथ्वी को अपनी कक्षा के आधे भाग, जो कि लघु अक्ष द्वारा अलग किया गया है और सूर्य से सुदूर है, जब सूर्य दीर्घवृत्तीय कक्षा की नाभि (फोकस) पर है, की यात्रा करने में लगने वाला समय आधे वर्ष से दो दिन अधिक है। कक्षा की उत्केन्द्रता $\frac{1}{60}$ ली गई है।

Prove that the time taken by the Earth to travel over half of its orbit, which is separated by the minor axis and is remote from the Sun, when the Sun is at the focus of the elliptic orbit, is two days more than half of the year. The eccentricity of the orbit is taken as $\frac{1}{60}$. *10*

(d) दिया गया है कि A और B एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित दो बिंदु हैं, जिनके बीच की दूरी 2a है। AO और BO दो समान भारी डोरी हैं जो O पर एक साथ बँधी हैं और जिनका भार O पर है। यदि प्रत्येक डोरी की लंबाई l है तथा d, AB से नीचे O की गहराई है, तो दर्शाइए कि इस कैटिनरी, जिसमें डोरी लटकी है, का प्राचल c

$$l^2 - d^2 = 2c^2\left[\cosh\left(\frac{a}{c}\right) - 1\right]$$

द्वारा दिया गया है।

Given that A and B are two points in the same horizontal line distant 2a apart. AO and BO are two equal heavy strings tied together at O and carrying their weight at O. If l is length of each string and d is depth of O below AB, then show that the parameter c of this catenary, in which the strings hang, is given by

$$l^2 - d^2 = 2c^2\left[\cosh\left(\frac{a}{c}\right) - 1\right].$$ *10*

(e) यदि $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ और $w = xy + yz + zx$ है, तो दर्शाइए कि grad u, grad v और grad w समतलीय हैं।

If $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ and $w = xy + yz + zx$, then show that grad u, grad v and grad w are coplanar. *10*

Q6. (a) यदि f(t) और g(t) के लाप्लास रूपान्तर क्रमश: F(s) और G(s) हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx\right) = F(s)\, G(s)$ है। इस परिणाम का प्रयोग करते हुए, समीकरण $y(t) = t + \int_0^t y(x) \sin(t-x)\, dx$ को हल कीजिए।

If F(s) and G(s) are Laplace transforms of f(t) and g(t) respectively, then prove that $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx\right) = F(s)\, G(s)$. Using this result, solve the equation $y(t) = t + \int_0^t y(x) \sin(t-x)\, dx$. *15*

(b) एक प्रत्यास्थ डोरी, जिसकी प्राकृतिक लंबाई a है, का एक छोर किसी बिंदु O पर स्थिर है और डोरी के दूसरे छोर पर एक भारी कण जुड़ा हुआ है। डोरी को ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर बिंदु C तक तब तक खींचा जाता है जब तक वह अपनी प्राकृतिक लंबाई से चार गुना न हो जाए तथा फिर छोड़ दिया जाता है। यदि डोरी का प्रत्यास्थता गुणांक कण के भार के बराबर है, तो दर्शाइए कि कण $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$ समय में उसी बिंदु C पर वापस आ जाएगा।

One end of an elastic string, having natural length a, is fixed at some point O and a heavy particle is attached to the other end of the string. The string is drawn vertically downward till it is four times its natural length at the point C and then released. If the modulus of elasticity of the string is equal to the weight of the particle, then show that the particle will return to the same point C in the time $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$. *15*

(c) (i) $\phi(x, y, z) = x^2y^2z^2$ का बिन्दु (1, 1, –1) पर, वक्र $x = e^t$, $y = 2\sin t + 1$, $z = t - \cos t$, के बिन्दु $t = 0$ पर स्पर्श-रेखा की दिशा में दिक्-अवकलज का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए।

Find the absolute value of the directional derivative of $\phi(x, y, z) = x^2y^2z^2$ at the point (1, 1, –1) in the direction of the tangent to the curve $x = e^t$, $y = 2\sin t + 1$, $z = t - \cos t$, at $t = 0$. *10*

(ii) यदि $\nabla \cdot \vec{E} = 0,\ \nabla \cdot \vec{H} = 0,\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ और $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ हैं,

तो दर्शाइए कि $\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ और $\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ हैं।

If $\nabla \cdot \vec{E} = 0,\ \nabla \cdot \vec{H} = 0,\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ and $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

then show that $\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ and $\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. *10*

Q7. (a) एक ठोस गोला अपनी त्रिज्या से दुगुनी त्रिज्या के स्थिर रूक्ष अर्धगोलीय कटोरे में रखा हुआ है। यदि एक बड़ा भार, कितना भी हो, गोले के सबसे ऊँचे बिंदु पर जुड़ा है, तो दर्शाइए कि संतुलन स्थिर है।

A solid sphere rests inside a fixed rough and hemispherical bowl of twice its radius. If a large amount of weight, whatsoever, is attached to the highest point of the sphere, then show that the equilibrium is stable. *15*

(b) $\oint_C [(xy + y^2)\, dx + x^2\, dy]$, जहाँ C, वक्रों $y = x$ और $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है, के लिए समतल में ग्रीन का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C [(xy + y^2)\, dx + x^2\, dy]$, where C is the boundary of the region bounded by the curves $y = x$ and $y = x^2$. *15*

(c) (i) अवकल समीकरण $\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{27}{8a}(x + y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)^3$ के व्यापक हल और विचित्र हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution and singular solution of the differential equation $\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{27}{8a}(x + y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)^3$. *10*

(ii) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x \log x$ का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए।

Find the complete solution of $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x \log x$. *10*

Q8. (a) अवकल समीकरण $(x + 2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2x + 5)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (1 + x)\, e^x$ को प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए।

Solve the differential equation $(x + 2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2x + 5)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (1 + x)\, e^x$ by the method of variation of parameters. *15*

(b) समकोणिक समांतरषट्फलक $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$ पर

$$\vec{F} = [(x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}]$$

के लिए गाउस अपसरण प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Gauss's divergence theorem for

$\vec{F} = [(x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}]$, taken over the rectangular parallelopiped $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$. *15*

(c) एक कण को ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार अनुप्रस्थ-परिच्छेद वाले स्थिर चिकने बेलन के अन्दर प्रारम्भिक क्षैतिज वेग u के साथ सबसे निचले बिंदु से प्रक्षेपित किया जाता है। दर्शाइए कि

(i) $(u^2 \le 2ag)$ के लिए; कण निचले आधे भाग में माध्य स्थिति के आसपास (about) दोलन करता है,

(ii) $(u^2 \ge 5ag)$ के लिए; कण पूर्णत: वृत्तीय गति करता है, और

(iii) $(2ag < u^2 < 5ag)$ के लिए; कण, वक्र को एक स्पर्शी की दिशा में, जो क्षैतिज के साथ कोण α बनाती है, छोड़ देगा, जबकि $\cos\alpha = \dfrac{u^2 - 2ag}{3ag}$ है।

A particle is projected inside a fixed smooth cylinder with circular cross-section in a vertical plane from the lowest point with initial horizontal velocity u. Show that for

(i) $(u^2 \le 2ag)$; the particle oscillates about the mean position in the lower half,

(ii) $(u^2 \ge 5ag)$; the particle executes complete circular motion, and

(iii) $(2ag < u^2 < 5ag)$; the particle will leave the curve in a tangential direction, making an angle α with the horizontal such that $\cos\alpha = \dfrac{u^2 - 2ag}{3ag}$. *20*